Université Blaise Pascal

Laboratoire de Mathématiques

Du rêve à la réalité

Dans notre univers, l'espace euclidien tri-dimensionnel $\mathbb{R}^3$, existe-il un objet qui, vu d'un coté ressemble à un cercle et d'un autre coté paraît être un rectangle ? La question n'est pas difficile, c'est un cylindre (Fig. 1).

Mais pourrait-on imaginer un objet qui donne deux ombres prescrites quelconques ? Peut-être...

Avec les mathématiques on peut imaginer encore plus. Dans ce but, d'abord on simplifie la situation, en se plaçant dans le plan bi-dimensionnel. Soit L_θ la ligne droite passant par le point d'origine d'un repère cartésien et faisant l'angle $\theta \in [0, \pi[$ avec l'abscisse.

Dans chaque ligne L_θ, on choisit un ensemble quelconque que l'on note G_θ. Alors, il est possible de construire un ensemble $F \in \mathbb{R}^2$ tel que pour presque tout θ la projection (l'ombre) de F sur la ligne L_θ prenne la forme de G_θ fixé toute à l'heure.

Bref, il existe un ensemble dont (presque) toutes les ombres sont prescrites !

Et ceci se généralise facilement à $\mathbb{R}^3$, l'espace de notre univers. Avec ce théorème on peut donc imaginer un cadran solaire numérique. Un appareil sans aucun mécanisme, sans alimentation électrique, sans aucune partie qui bouge, seulement un ensemble de masques qui donnent des ombres en forme de chiffres. Et ces chiffres affichent l'heure en fonction de la position du soleil...

Un rêve d'un mathématicien ?

Oui. Mais, parfois, des rêves se réalisent. Ce théorème a été publié par K. Falconer en 1987 et vulgarisé par M. Gardner en 1991 (dans "Scientific American"). Trois ans plus tard un groupe d'inventeurs allemands a construit le prototype. En 1998 le premier cadran solaire a été installé dans un parc public, à Genk en Belgique (Fig. 2 et 3). Des versions plus petites (de poche par exemple) existent aussi (Fig. 4)

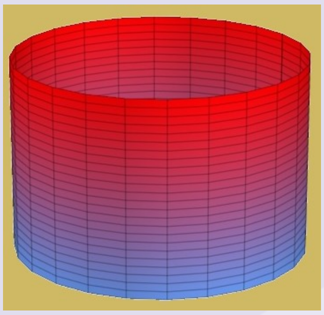


Fig. 1

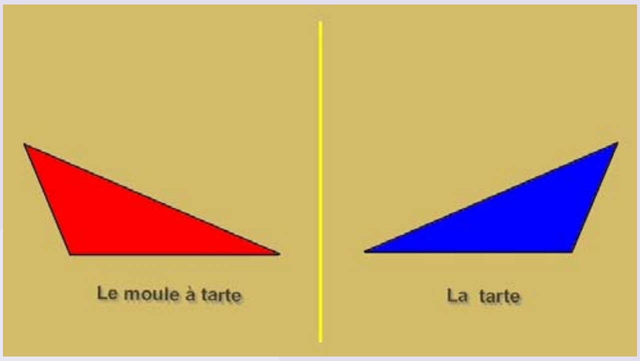
Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Le pâtissier géomètre

Il était une fois un pâtissier, féru de géométrie mais distrait. Il possédait un moule à tarte en forme de triangle scalène (c'est-à-dire un triangle dont les trois côtés sont de longueurs deux à deux distinctes et tel que de plus ce triangle ne soit ni rectangle, ni isocèle, ni équilatéral, bref, un triangle vraiment quelconque).
Pour faire sa tarte, il en mesura les trois côtés, réalisa la pâte aux dimensions et la couvrit de fruits. Hélas, il s'aperçut alors que le triangle qu'il venait de réaliser n'était pas le bon mais son symétrique par rapport à une droite. Sauf à faire une tarte Tatin (à l'envers, avec les fruits sous la pâte), il ne pouvait mettre sa tarte dans le moule. Il réfléchit un instant, se souvint du théorème de Bolyai et en trois coups de couteau mit sa tarte au four. Comment s'y prit-il ?



Commentaire :

Ce problème amusant illustre le théorème de Bolyai (1802-1860). Si, à partir des mêmes pièces d'un puzzle, on réalise deux polygones distincts, il est évident que ces deux polygones ont la même aire.
Le théorème de Bolyai affirme que la réciproque est vraie. Si deux polygones ont la même aire, il existe un puzzle qui permet de passer de l'un des polygones à l'autre. Le théorème de Bolyai est un théorème d'existence mais il ne fournit pas vraiment de moyen de trouver la solution. C'est le problème du pâtissier que de trouver le puzzle.

Donnons un autre exemple. D'après le théorème de Bolyai, il existe un puzzle qui permette de passer d'un carré à un triangle équilatéral dès que ces deux figures ont la même aire, mais le théorème de Bolyai ne donne pas le puzzle. Les plus beaux puzzles sont ceux qui comportent le moins de pièces. Pour le carré et le triangle équilatéral de même aire, trois pièces suffisent pour passer de l'un à l'autre. Saurez-vous les trouver ?

De manière assez surprenante, un théorème analogue est faux en dimension 3. Il existe des polyèdres de même volume qui ne peuvent pas être obtenus à partir d'un même puzzle.

FÊTE DE LA SCIENCE