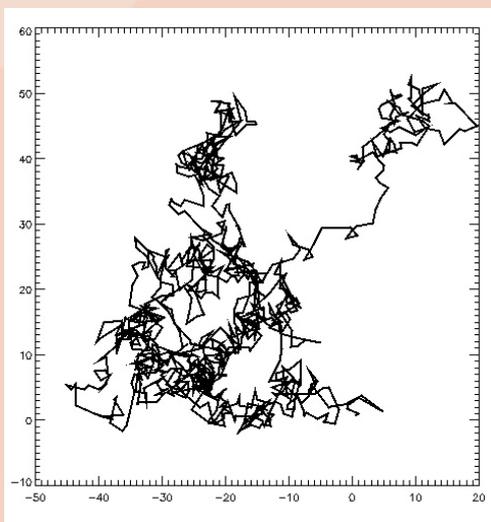


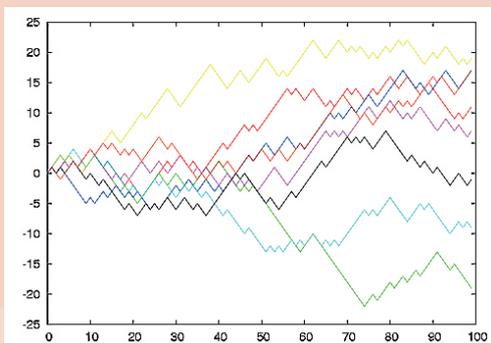
Quelques développements autour du mouvement brownien

Laboratoire de Mathématiques

Le mouvement brownien est né au XIX siècle quand le botaniste **Brown** a observé le mouvement de particules de pollen dans un liquide. Au début du XX, **Einstein** expliqua ce mouvement par les chocs de la particule avec les molécules environnantes soumises à l'agitation thermique. Dans ce cas il s'agit d'un mouvement brownien dans le plan dont une simulation figure ci-dessous.



Le mouvement brownien uni-dimensionnel est la limite de marches aléatoires du type "pile ou face" quand on renormalise suivant chacun des axes. Ci-dessous on a colorié différemment plusieurs trajectoires simulées.



Le "calcul stochastique" initié par **Ito** est une généralisation du calcul différentiel et intégral ordinaire mais adaptée aux trajectoires très irrégulières du mouvement brownien.

La finance mathématique utilise énormément le calcul stochastique. Sa formule la plus célèbre a été élaborée par **Black et Scholes** en 1973. Elle détermine le prix C d'une option qui donne le droit d'acheter au prix K et à la date T une action dont le cours actuel est S .

$$C = S N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

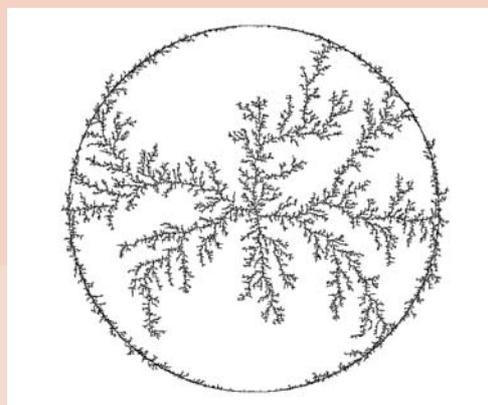
$$d_2 = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \ln \left(\frac{S}{K e^{-rT}} \right) - \frac{\sigma \sqrt{T}}{2}$$

$$d_1 = d_2 + \sigma \sqrt{T}$$

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

où r est le taux d'intérêt en vigueur et σ est un paramètre caractéristique de l'action.

Dans le modèle DLA qui signifie **Diffusion Limited Aggregation** des particules sont émises au bord d'un domaine et évoluent suivant des mouvements browniens jusqu'à toucher un agrégat qui se forme ainsi au fur et à mesure des dépôts de particules. De cette façon, on obtient au milieu de l'image simulée un ensemble **fractal** qui ressemble fort aux dépôts électrolytiques que l'on observe en chimie.



Le mouvement brownien est très utilisé en physique notamment la mécanique statistique. Parmi toutes ses applications a été introduit dans les 20 dernières années le **super-mouvement brownien**. Il modélise l'évolution d'un nuage de particules qui se déplacent dans l'espace comme des mouvements browniens, et de plus, meurent et se divisent à un rythme élevé. C'est la limite du processus de contact qui décrit la propagation d'une épidémie, et du processus du votant qui modélise l'évolution spatiale de la répartition d'une opinion.

