M2 Mathématiques Recherche 2016-2017

Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand II

Les cours sont regroupés en blocs.

Bloc 1 : Mathématiques générales.

Ce bloc est destiné aux étudiants souhaitant préparer l'agrégation simultanément à leur M2.

Bloc 2 : Modélisation et mathématiques appliquées.

Ce bloc est destiné aux étudiants souhaitant faire ensuite une thèse en mathématiques appliquées, ou bien postuler sur des emplois de type ingénieur.

Bloc 3 : Analyse

Ce bloc est destiné aux étudiants désirant ensuite faire une thèse en mathématiques fondamentales. Le thème privilégié cette année est "Analyse".

Liste des cours

Les cours (10 ECTS chacun) sont à choisir parmi la liste suivante (3 au S1, 2 au S2). Obligatoire : 1 stage à 10 ECTS au S2.

Semestre 1 (3 cours à choisir)

• Algèbre approfondie
• Analyse approfondie
• Equations aux dérivées partielles et modélisation
• Analyse harmonique (C. Kriegler)
• Calcul stochastique et finance (commun avec Polytech) (P. Bertrand, A. Guillin).
• Modélisation et méthodes numériques (commun avec Polytech) (T. Dubois, M. Fogli, R. Touzani).

Semestre 2 (2 cours à choisir)

• Equations aux dérivées partielles et analyse (Y. Amirat, N. Cindea, , K. Latrach).
• Probabilités, processus stochastiques, analyse
• Analyse fractale (A. Stos)
• Cours de lecture (Stage).
• Thèmes en algèbre et géométrie
• Thèmes en analyse, probabilités et modélisation

Le dossier d'admission est téléchargeable à l'adresse
http ://www.univ-bpclermont.fr/formation/formation/UBP-PROG19550.html

Responsable de la formation : Arnaud Münch - Arnaud.Munch@math.univ-bpclermont.fr - 04 73 40 70 76

Organisation par blocs

Les cours sont regroupés en blocs thématiques.

Bloc 1 : Mathématiques générales

Ce bloc est destiné aux étudiants souhaitant préparer l'agrégation simultanément à leur M2. Les cours constituant ce bloc sont les suivants.

Semestre 1

- Algèbre approfondie
- Analyse approfondie
- Equations aux dérivées partielles et modélisation

Semestre 2

- Thèmes en algèbre et géométrie
- Thèmes en analyse, probabilités et modélisation

Bloc 2 : Modélisation et mathématiques appliquées

Ce bloc est destiné aux étudiants souhaitant faire ensuite une thèse en mathématiques appliquées, ou bien postuler sur des emplois de type ingénieur. Pour de tels étudiants qui souhaiteraient également passer l'agrégation, il est semble raisonnable de suivre le M2 dans ce bloc, puis de préparer et passer l'agrégation l'année suivante.

Semestre 1

- Equations aux dérivées partielles et modélisation
- Calcul stochastique et finance (commun Polytech) (P. Bertrand, A. Guillin).
- Modélisation et méthodes numériques (commun Polytech) (T. Dubois, M. Fogli, R. Touzani).

Il est possible de remplacer l'un des cours communs avec Polytech par le cours "Analyse approfondie".

Semestre 2

- Cours de lecture.

  \+ Choix entre :
- Equations aux dérivées partielles et analyse (Y. Amirat, N. Cindea, K. Latrach)
- Probabilités, processus stochastiques, analyse

Bloc 3 : Analyse

Ce bloc est destiné aux étudiants désirant ensuite faire une thèse en mathématiques fondamentales. Le thème choisi cette année est "Analyse". Pour de tels étudiants qui souhaiteraient également passer l'agrégation, il est semble raisonnable de suivre le M2 dans ce bloc, puis de préparer et passer l'agrégation l'année suivante.

Semestre 1

- Algèbre approfondie
- Analyse approfondie
- Analyse harmonique (C. Kriegler)

Il est possible, pour des étudiants voulant s'orienter de façon certaine vers l'analyse, de remplacer le cours d'algèbre approfondie par un autre cours.

Semestre 2

- Analyse fractale (A. Stos)
- CL : Cours de lecture.

En théorie tous les choix de cours sont possibles mais l'organisation en bloc est censée vous aider à faire des choix cohérents. Plus vos choix sont erratiques, moins l'ouverture des cours à petits effectifs est garantie.

Descriptif des cours

Algèbre approfondie (50H)

Compléments en algèbre. Anneaux noethériens, théorie abstraite des anneaux factoriels. Modules sur anneau, modules libres, matrices à coefficients dans un anneau, modules sur un anneau principal et applications. Représentations linéaires des groupes finis. Formes quadratiques. Groupes classiques.

Analyse approfondie (50H)

Compléments en analyse. Analyse complexe : zéros des fonctions holomorphes, produits infinis, propriété de Montel, représentation conforme, fonctions spéciales, approximation par des fractions rationnelles. Analyse fonctionnelle : théorème de Stone-Weierstrass, bases dans les espaces de Banach, mesures de Radon, fonctions à variation bornée, fonctions absolument continues.

Thèmes en algèbre et géométrie (30H cours + 30h TD)

Compléments en algèbre et géométrie en vue des épreuves orales de l'agrégation.

Thèmes en analyse, probabilités et modélisation (30H cours + 60H TD)

Compléments en analyse et probabilités en vue des épreuves orales de l'agrégation. Compléments en calcul scientifique.

Equations aux dérivées partielles et modélisation (50H).

Compléments sur les équations différentielles ordinaires : aspects théoriques, numériques et qualitatifs. Equation de transport. Méthodes des caractéristiques, discrétisation en dimension 1. Equation des ondes sur R et sur un domaine borné, discrétisation en dimension 1. Distributions, espaces de Sobolev, exemples d'équations aux dérivées partielles.

Calcul stochastique et finance (commun Polytech) (50H).

◦ *Modélisation des marchés financiers (25h, P. Bertrand).* Introduction aux notions de portefeuille de couverture, Absence d'opportunité d'arbitrage, probabilité neutre au risque. Calcul du prix et du portefeuille de couverture pour des options européennes en temps discret. Formule de Black & Scholes en temps continu Option américaines.

◦ *Processus financiers (25h, A. Guillin).* Rappels de probabilités (Espérance conditionnelle), Définitions générales et exemples intuitifs de processus aléatoires, Chaînes de Markov à temps et états discrets, Processus de Poisson et de renouvellement, Martingales et mouvement Brownien, Calcul de Itô (formules de : Itô, Girsanov, représentation de martingales), Équations différentielles stochastiques à coefficients Lipschitz, Diffusions et équations aux dérivées partielles linéaires.

Modélisation et méthodes numériques (commun Polytech) (50H).

◦ *Calcul scientifique avancé (14h, R. Touzani).* Méthodes numériques précises pour la résolution numérique de problèmes. Problèmes à frontière libre et de propagation d'interfaces, Différentes formulations de ces problèmes, Méthodes numériques de résolution.

◦ *Mécanique des solides déformables (20h, M. Fogli).* Tenseur des déformations Tenseur des contraintes Loi de comportement d'un milieu continu solide déformable équations fondamentales de la MMCSD Modélisation , formulation et résolution d'un problème de MMCSD

◦ *Méthodes numériques pour la mécanique des fluides (16h, T. Dubois).* Introduction aux équations de la mécanique des fluides, Espaces fonctionnels et résultats d'existence, unicité et régularité, Analyse de schémas de semi-discrétisation en temps, Discrétisation couplée espace-temps, Méthodes de projection

---

Equations aux dérivées partielles - Analyses et méthodes numériques (45H)

◦ *Introduction aux équations de Navier-Stokes (Y. Amirat, 15h).*.

– Modélisation : lois de comportement des fluides classiques
– Les espaces fonctionnels pour l'hydrodynamique
– Les équations de Stokes. Résultats d'existence et d'unicité
– Les équations de Navier-Stokes. Résultats d'existence

◦ *Equations aux dérivées partielles d'évolution et semi-groupes d'opérateurs (N. Cindea, 15h).*

L'évolution de l'état de beaucoup de systèmes modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP) peut être décrite à l'aide des semi-groupes d'opérateurs. L'état d'un tel système est un élément dÕun espace normé infini-dimensionnel. L'étude des semi-groupes d'opérateurs est un domaine de l'analyse fonctionnelle qui connait une activité de recherche très intense.

Une première partie de ce cours traite le cas des opérateurs définis sur des espaces de dimension finie, introduit l'exponentielle matricielle et établit ses propriétés et son role dans la résolution des systèmes d'équations différentielles ordinaires. Par analogie, dans la deuxième partie du cours on définit les semi-groupes d'opérateurs et on étudie leur propriétés. Notamment, le Théorème de Hille-Yoshida nous permet de démontrer facilement l'existence, lÕunicité et la régularité des solutions de certaines EDP linéaires d'évolution. Quelques exemples de telles équations sont l'équation de la chaleur, l'équation des ondes et l'équation de Schrodinger.

Finalement, dans la troisième partie du cours nous allons nous intéresser à quelques problèmes liés à la contrôlabilité et ł'observabilité des systèmes distribués pour lesquels la théorie de semi-groupes d'opérateurs est un cadre très approprié.

◦ *Introduction à l'équation de Boltzmann (K. Latrach, 15h)*

Ce cours est une introduction à l'équation de Boltzmann pour les gaz rarifiés formés de sphères rigides où les collisions entre les particules sont uniquement binaires et élastiques. Le cours s'articule au tour des points suivants :

1. Dérivation formelle de l'équation de Boltzmann (via l'équation de Liouville), conservation de l'énérgie cinétique et la quantité de mouvement des particules, forme de l'opérateur de collisions $Q(\cdot,\cdot)$, propriétés élémentaires de l'opérateur de collision, invariants collisionels, solutions de l'équation $Q(f,f)=0$, lois de conservation et entropie, inégalité de Boltzmann, le théorème H de Boltzmann, relation de l'équation de Boltzmann avec les équations des fluides.

2. Etude de l'existence et l'unicité des solutions (intégrées) de l'équation de Boltzmann au voisinage de l'équilibre pour des données initiales assez petites.

Probabilités, processus stochastiques, analyse (45H).

◦ *Analyse fractale (Y. Heurteaux, 22,5h).* Mesures, mesures extérieures, lemmes de recouvrement, lemme de Frostman - Théorie de la dimension - mesures et dimension de Hausdorff - dimension de boite et de packing - dimension capacitaire - exemples - Notion de mesure multifractale - mesures autosimilaires - introduction au formalisme multifractal - Introduction aux cascades de Mandelbrot.

◦ *Mouvement brownien (L. Serlet, 22,5h).* Constructions du mouvement brownien, théorème de Donsker - Régularité des trajectoires - Temps locaux -Propriétés fractales.

Analyse harmonique (45h)

Ce cours de M2, master mathématiques, traite l'analyse harmonique classique, allant des séries de Fourier sur le tore T à la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$ et aux intégrales singulières basiques.

Séries de Fourier

On abordera la desription des fonctions $f \in L^p(T)$ et plus généralement des éléments d'un espace de Banach homogène sur T par une série trigonométrique. Une attention particulière sera mise sur la sommabilité et des types de convergence de la série. La théorie de convergence est particulièrement satisfaisante dans l'espace $L2(T)$ et nous allons aussi regarder des espaces duaux des espaces homogènes.

Les opérateurs agissant sur un espace homogène avec une structure de Fourier riche sont les opérateurs invariants par translation. Nous donnerons leur description dans des cas particuliers importants.

Transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$

Nous aborderons les propriétés de base de la transformation de Fourier : convergence, comportement à l'infini, translation, dilation, derivation et convolution. Nous dévéloppons en détail la transformation inverse et la continuité de la transformation de Fourier dans des diverses espaces. Au passage, nous pourrons ainsi introduire des notions de la théorie des distributions (tempérées).

En parallel avec les séries de Fourier, nous regarderons les opérateurs invariants par translation sur $\mathbb{R}^n$ et donnerons en plus le théorème de multiplicateurs de Mihlin.

Fonctions maximales et intégrales singulières

Une suite des opérateurs invariants par translation et donnée par l'étude de l'opérateur maximal de Hardy et Littlewood. Nous démontrerons sa bornitude et verrons que la stratégie de preuve s'applique à bien d'autres cas, comme le théorème de Mihlin et la transformée de Hilbert.

Prérequis

– Cours de Licence 3 : Séries de Fourier et espaces de Hilbert.
– Cours de Master 1 : Analyse fonctionnelle.

Littérature

– Katznelson, Yitzhak : An introduction to harmonic analysis.
– Grafakos, Loukas : Classical Fourier analysis.

Analyse fractale (A. Stos, 45h)

Rappels et complemets d'analyse : Lemmes de recouvrement (Vitali, Besicovich), lemme de Borel - Cantelli. Fondations de la théorie de la mesure : tribu borélienne, mesure extérieure, ensembles mesurables, support et l'ensemble portant la mesure.

Dimensions fractales : Minkowski-Bouliigand et Hausdorff. Exemples, techniques de calcul, lemme de Frostman, potentiel.

Geométrie fractale : systèmes de fonctions itérées, condition de l'ensemble ouvert, dimension.

Analyse fractale des mesures : Dimensions des mesures, fonction tau de structure. Modèle de cascades de Mandelbrot : dimension, spectre, non-dégénérescence. Transformée de Legendre.